DUALITÀ

ORIGINI E SIGNIFICATO DELLA LEGGE DI DUALITÀ

Scopo di questo nostro lavoro è l'analisi dell'evoluzione della geometria, nel processo che l'ha portata dal suo significato originario di "scienza dello spazio" (determinata quindi dai suoi contenuti o dai suoi oggetti), a quello moderno di sistema ipotetico-deduttivo, gioco logico determinato dai postulati scelti liberamente, con la sola precauzione di non contraddittorietà. In altri lavori abbiamo analizzato alcuni aspetti di questa evoluzione attraverso i testi degli autori che - più o meno consapevolmente - l'hanno provocata. Vorremmo qui occuparci, con lo stesso metodo, dell'evoluzione dell'idea della geometria che si è avuta con l'adozione del concetto di dualità geometrica.

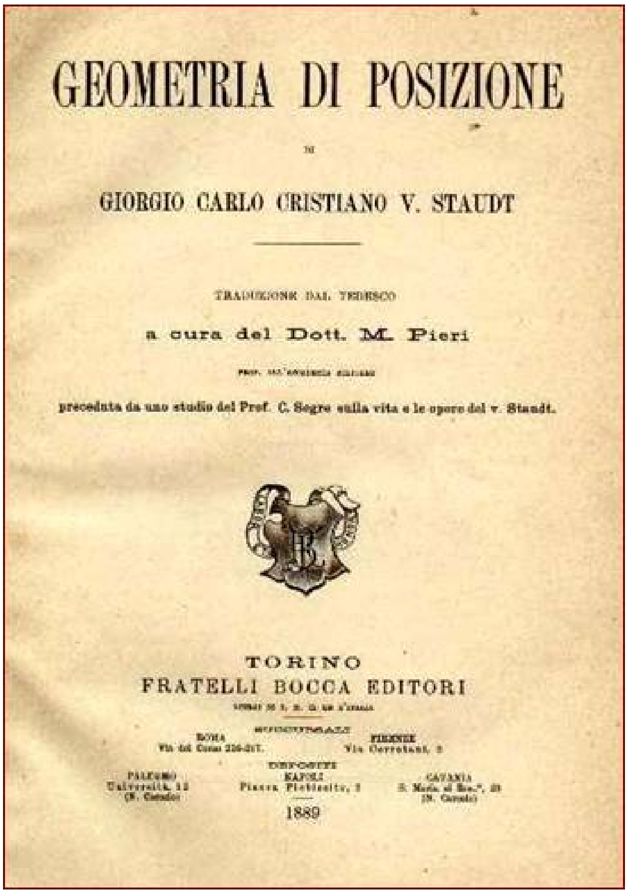
Il concetto di dualità si espone oggi concisamente (Cfr. Bourbaki – *Éléments d'histoire des mathématiques*) parlando di isomorfismo tra uno spazio vettoriale su un campo numerico K e le applicazioni lineari dello spazio stesso su K. Ma a noi appare particolarmente interessante seguire lo sviluppo storico di questo concetto, che presenta alcuni aspetti caratteristici i quali possono illuminare non soltanto lo sviluppo della geometria, considerata come una branca della matematica, anzi uno dei suoi rami principali, ma anche l'evoluzione della matematica tutta intera, intesa come sistema di contenuti e di metodi. Ci interessa mettere qui in evidenza alcune tappe di questa evoluzione, che non sempre sono cronologicamente successive, come vedremo, ma che possono essere distinte per chiarezza di esposizione, anche se spesso il loro manifestarsi è stato contemporaneo o quasi.

1 Un primo aspetto della dualità si presenta all'attenzione dei matematici come una specie di fenomeno "curioso" che viene attribuito agli oggetti dello studio e che permette una notevole economia di calcoli e di enunciati e consente di unificare delle dottrine che apparivano prima come frammentarie e parcellizzate. In questo ordine di idee la precedenza cronologica pensiamo sia senz'altro da attribuirsi alla polarità sulla sfera ed alla trigonometria sferica. Nella mente dei geometri e nella esposizione dei trattatisti è venuta progressivamente affermandosi la coscienza di questo "parallelismo" tra enunciati relativi agli angoli ed enunciati relativi ai lati, che è fondato sulla polarità, e che conduce alla possibilità di trasformare le formule anche nel campo metrico, oltre che in quello degli enunciati di appartenenza (o enunciati 'grafici', come si usava dire nella geometria proiettiva classica. Cfr. Enriques - Geometria proiettiva). In questo ordine di idee la dualità sulla sfera e la "curiosa" corrispondenza tra enunciati della geometria della sfera e della trigonometria sferica ha origini molto lontane (Cfr. Nota bibliografica allegata).

2 Un secondo aspetto molto importante, che provoca una apertura di idee ed un allargamento notevole del campo di analisi, è dato dalla influenza che la dualità, puramente geometrica, ha avuto sulla logica e sulla concezione di questa dottrina. Si potrebbe far risalire l'origine di questo atteggiamento a J. D. Gergonne [1771 – 1859] ed alle sue ricerche di geometria piana. Troviamo invero in questo Autore la tecnica di enunciare in modo parallelo (di due colonne) due proposizioni duali fra loro e quindi troviamo messa in evidenza, in modo rudimentale, quella che diventerà la "legge di sostituzione letterale" della logica di oggi. Questa tecnica di enunciazione parallela di proposizioni verrà incontrata poi in K. K. von Staudt e giù giù fino ad Enriques. Tale tecnica, come abbiamo detto, in certo senso costituisce l'inizio della pratica di dedurre proposizioni valide da altre proposizioni valide mediante il procedimento puramente formale di sostituzione di simboli grafici (parole nel caso in esame); la validità del procedimento, in questo caso, non risulta fondata sul contenuto o sul significato dei simboli grafici utilizzati, ma, in modo sempre più esplicito e cosciente nei vari Autori considerati, risulta fondata sulla sussistenza di un parallelismo cosiffatto negli enunciati primitivi (assiomi e definizioni implicite degli enti di cui si tratta). Osservava già un caro e non dimenticato Maestro, (O. Chisini), durante le sue lezioni di geometria proiettiva, che tra il teorema di Pascal sulle coniche ed il suo duale (che va sotto il nome di "Teorema di Briançon") dovettero passare più di 200 anni, mentre oggi la legge di dualità permette di enunciare immediatamente uno

quale si voglia dei due teoremi quando sia stato dimostrato l’altro, senza bisogno di dimostrazioni particolari.

3 Si apre qui l'adito alla considerazione del terzo aspetto del fenomeno storico che vogliamo considerare, cioè l'analisi delle fasi su cui la dualità è stata fondata nei suoi inizi. In questo ordine di idee si potrebbe dire che l'opera di pioniere stata svolta dal Plücker, il quale ha osservato che le rette nel piano ed piani nello spazio potevano essere determinati con coordinate, in modo analogo a quello in cui erano stati determinati i punti. Sappiamo bene che questo modo di procedere (dovuto a Gergonne ed a Poncelet, oltreché a Plücker), ha aperto la strada ad un insieme di nuove scoperte a proposito della geometria algebrica; in particolare ha condotto alla considerazione parallela della curva algebrica piana considerata contemporaneamente come luogo dei suoi punti e come inviluppo delle sue tangenti, ed ha dato un impulso decisivo alla delucidazione di certi paradossi che vanno ancora sotto il nome di Poncelet e di Plücker (Cfr. Enriques e Chisini - Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Libro I - Vol. I).


GEOMETRIA DI POSIZIONE

DI

GIORGIO CARLO CRISTIANO V. STAUDT

TRADUZIONE DAL TEDESCO

a cura del Dott. M. Pieri

preceduta da uno studio del Prof. C. Segre sulla vita e le opere del v. Staudt.

TORINO

FRATELLI BOCCA EDITORI

ROMA Via del Corso 216-217. FIRENZE Via Cerretani, 8

1889

4 Gli sviluppi ai quali abbiamo fatto cenno conducono in modo naturale alla considerazione del quarto fenomeno che vorremmo analizzare; si tratta del fenomeno che potrebbe essere indicato sommariamente come *ampliamento* dello spazio mediante elementi impropri e di generalizzazione dell’elemento generatore dello spazio. Invero anche la geometria proiettiva elementare non ammetterebbe dualità se non si ampliasse prima lo spazio con elementi impropri (o all'infinito, come si usava dire nelle presentazioni classiche) ed in questo ordine di idee si potrebbe dire che la considerazione della legge di dualità dava una ulteriore giustificazione alle idee fondamentali della geometria proiettiva, i cui primi germi sono - come è noto - da far risalire a Desargues (vedere il nostro lavoro precedente), e che sono maturati completamente con V. Poncelet, ricevendo poi una presentazione ineccepibile con K. K. Von Staudt, il quale nella sua Geometrie der Lage [Geometrie der Lage, (1847); Beiträge zur Geometrie der Lage (1856-57-60); traduzione italiana di M. Pieri, Torino, Bocca, 1889] enuncia i suoi assiomi in modo assolutamente omogeneo, senza far distinzioni tra elementi al finito o all'infinito. Questa distinzione ritornerà nella presentazione classica, quando si tratterà di interpretare le proposizioni dimostrate nei vari casi particolari che interessano la geometria elementare (metrica), ma non nella logica della presentazione della dottrina in tutta la sua generalità.

5 Vorremmo infine prendere in considerazione un quinto aspetto di questo fenomeno, che doveva avere grandissime conseguenze per la evoluzione della geometria, di cui abbiamo parlato. Si potrebbe tentare di descrivere questo fenomeno dicendo che gli sviluppi cui abbiamo accennato in precedenza conducevano in modo quasi necessario ad una visione diversa e nuova degli enti di cui la geometria si occupa. Invero nella concezione classica il punto veniva considerato per eccellenza come l’elemento delle figure. Queste venivano considerate come dei luoghi di punti e questa abitudine portava ad una certa necessaria dissimmetria di presentazione della dottrina geometrica, che costituiva in certo senso una sua caratteristica e che traeva forse le sue origini dallo stretto collegamento che si pensava allora esistente tra la geometria e la

fisica (*sviluppare questo concetto, introducendo anche le citazioni di Boscovich e gli sviluppi del lavoro che lo concerne (*)*). Tutto questo atteggiamento faceva parte della concezione della geometria come scienza di contenuti, che era quindi in certo modo determinata dalla 'evidenza' degli assiomi euclidei, e che non osava distaccarsi dalla visione classica (potremmo dire pitagorica), la quale legava strettamente gli enunciati geometrici alle proprietà di un certo presunto “spazio geometrico” (*citare anche la Enciclopedia di Diderot per confortare questo modo di vedere le cose, valido anche presso gli Illuministi*).

È appena necessario osservare che l'idea di considerare per esempio la retta come elemento generatore del piano ed il punto come un luogo di rette (centro di un fascio) e gli analoghi cambiamenti che riguardano la geometria dello spazio capovolgeva radicalmente questo modo di vedere le cose, togliendo di mezzo l’idea della esistenza di un elemento (privilegiato, in certo modo fondamentale e costitutivo di tutte le figure), per introdurre invece una simmetria perfetta negli enunciati e nelle proprietà; questo a sua volta apriva la strada alla considerazione puramente formale ed astratta degli assiomi enunciati come puri legami logici tra i concetti, non identificati con riferimento alla esperienza esteriore e quindi senza la pretesa che il fondamento degli assiomi sia l'evidenza o la corrispondenza tra i contenuti degli enunciati ed i loro significati fisici. Questo allargamento della visione dei contenuti della geometria veniva ulteriormente sfruttato dalle concezioni di Klein e S. Lie (1842 – 1899) nella teoria delle *trasformazioni di contatto* (Berhürungstransformationen). [S. Lie und G. Scheffers. Geometrie der Berhürungstransformationen. Leipzig, B. G. Teubner, 1896]. In queste, come è noto, viene considerata la “faccetta piana” avente il suo centro in un punto dello spazio. Nella concezione di Klein e Lie le faccette possono “organizzarsi” in vari modi; o come faccette tangenti ad una superficie nel senso intuitivo del termine, oppure come faccette tangenti ad una curva dello spazio, oppure infine come faccette aventi il centro fisso e quindi appartenenti tutte ad una stella di piani. Si potrebbe dire pertanto che in questa concezione si traggono le conseguenze estreme di quel capovolgimento di punti di vista che aveva avuto la sua origine in Plücker e Poncelet.

Ovviamente non tutti gli autori che abbiamo considerati si dimostrano pienamente consapevoli delle conseguenze alle quali conduce il loro modo di concepire la geometria. Ma questa ultima considerazione fa parte di una visione della storia della scienza che abbiamo più volte esposta e che non ripetiamo qui.

Bibliografia.

Notizie sulla dualità che si trovano in ENCICLOPEDIA DELLE MATEMATICHE ELEMENTARI di L. Berzolari, G. Vivanti, D. Gigli. (Milano, Hoepli - 1937) Volume II.

Sfera e trigonometria sferica: Art. XXX - Amedeo Agostini - Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. Trigonometria piana e sferica. Specialmente nella parte III, §§ 16, 17, 29 ed altrove. Molte citazioni storiche sui geometri che si sono occupati della sfera e della dualità..

Art. XXXIV - Beniamino Segre - Geometria analitica. In particolare § 5 - La geometria proiettiva con indicazioni bibliografiche relative alla legge di dualità. § 28 - Coordinate plückeriane. Principio di dualità. (per Poncelet la dualità era 'reciprocità').

Art. XXXV - Eugenio G. Togliatti - Geometria proiettiva. § 4 - Leggi di dualità.

NdR (*) *R. G. Boscovich e i precursori di V. Poncelet*. CFM e Maria Spoglianti. Rendiconti del Seminario Matematico di Brescia, 3 (1979), pp. 142-180.

Reimpaginato marzo 2014